MATEMÁTICA APLICADA

1 Para celebrar uma festa, o centro acadêmico de uma faculdade escolhe entre dois lugares cujos preços são:

Salão A	**Salão B**
R$ 1 000,00 mais R$ 5,00 por pessoa	R$ 200,00 mais R$ 10,00 por pessoa

A capacidade máxima de ambos os lugares é de 300 pessoas. O centro não tem ainda o número de pessoas que irá à festa.

A Para que número de pessoas é indiferente o salão a ser escolhido pelo centro acadêmico?

B Represente graficamente em um mesmo par de eixos cada uma das duas funções que expressa o preço de cada salão em função do número de pessoas que irá à festa. Que salão deve ser escolhido caso o número de pessoas presentes na festa seja maior do que o número obtido no item **A** ?

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

A Podemos expressar as quantias que o centro iria pagar através de duas funções cujos gráficos no plano cartesiano são retas:

Salão A: $y = 1000 + 5x$

Salão B: $y = 200 + 10x$

O ponto de intersecção das duas retas é $(160, 1800)$.

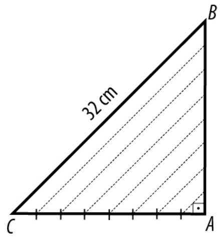
- Para 160 pessoas, é indiferente o salão a ser escolhido.

B Salão A.

2

A As idades de três irmãos (a, b, c) formam uma progressão aritmética crescente. Se o irmão mais novo tivesse 1 ano a mais, ou se o irmão mais velho tivesse dois anos a mais, as suas idades estariam em progressão geométrica nessa ordem. Quais são as idades dos três irmãos?

B Dividimos o lado $\overline{AC}$ de um triângulo retângulo ABC em 8 partes iguais. Traçamos desde os pontos de divisão segmentos paralelos ao lado $\overline{BC}$. Se $\overline{BC}$ mede 32 cm, quais são as medidas do menor e do maior dos 7 segmentos traçados?



RESOLUÇÃO E RESPOSTA

A Seja a sequência crescente (a, b, c) das idades dos três irmãos. Como estão em PA, temos que:

$$b=\frac{a+c}{2}$$

- A sequência (a+1, b, c) é uma PG: $b^2=c(a+1)$
- A sequência (a, b, c+2) é uma PG: $b^2=a(c+2)$

Igualamos estas duas últimas equações:

$$c(a+1)=a(c+2)\rightarrow ac+c=ac+2a\rightarrow c=2a$$

Substituímos $c=2a$ em $b=\frac{a+c}{2}$:

$$b=\frac{a+2a}{2}\rightarrow b=\frac{3a}{2}$$

Substituímos $c=2a$ e $b=\frac{3a}{2}$, por exemplo na equação: $b^2=c(a+1)$

$$\frac{9a^2}{4}=2a(a+1)\rightarrow 9a^2=8a^2+8a\rightarrow a^2-8a=0\rightarrow a(a-8)=0\rightarrow a=8(a\neq 0)$$

Obtemos $a=8$, $b=12$ e $c=16$. Os irmãos têm 8, 12 e 16 anos.

B Os triângulos de vértice A e tendo como lado oposto os segmentos traçados, são semelhantes ao triângulo ABC. Dividimos o lado $\overline{AC}$ em 8 partes iguais de medida a centímetros cada uma. Podemos escrever:

$$\frac{x}{a}=\frac{y}{7a}=\frac{32}{8a}\rightarrow x=4\text{ cm e } y=28\text{cm}.$$

MATEMÁTICA APLICADA

3 Jorge e Miguel estão jogando tênis. Jorge rebate a bolinha e esta percorre 16 metros em linha reta. Miguel a devolve em linha reta com um ângulo de 30° com a linha reta descrita pela bolinha após a rebatida de Jorge. Desta vez, a bolinha percorre 10 metros. Que distância deverá percorrer Jorge para rebater a bolinha?

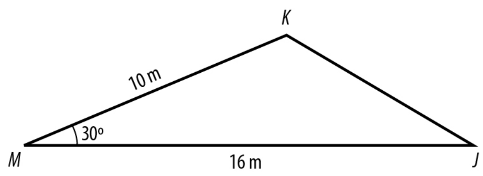
Use a aproximação: $\sqrt{3} = 1{,}7$.

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

Aplicando a lei dos cossenos no triângulo MJK:

$$d^2 = 10^2 + 16^2 - 2(10)(16)\frac{\sqrt{3}}{2} = 84$$

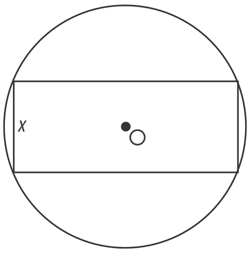
$$d = \sqrt{84} = 2\sqrt{21}\ m$$



Portanto, Jorge deverá percorrer cerca de $2\sqrt{21}\ metros$ para chegar à bolinha.

4

A Em uma circunferência de diâmetro 20 cm se inscreve um retângulo de lado *x*. Expresse a área do retângulo em função de *x* e determine o domínio dessa função.

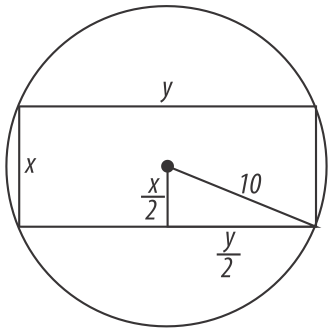


B Uma função contínua $f(x)$ é crescente. O domínio é o intervalo $[-4,4]$ e a imagem é o intervalo $[2,8]$. Determine os valores $f(-4)$ e $f(4)$. Justifique a sua resposta fazendo, à mão livre, um esboço do gráfico da função $f(x)$.

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

A Aplicando o teorema de Pitágoras, obtemos:

$$\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{4}=10^2 \rightarrow y^2+x^2=400 \rightarrow y=\sqrt{400-x^2}$$



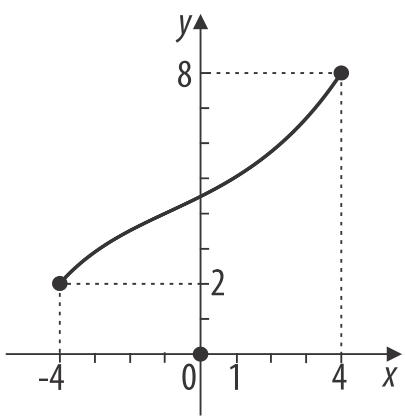
Para encontrar o domínio da funçãof $f(x)=y=\sqrt{400-x^2}$, resolvemos a inequação:

$$400-x^2>0 \rightarrow -20<x<20$$

Mas como *x* e *y* são necessariamente números reais positivos, o domínio da função *f*(*x*) é o intervalo aberto (0,20) ou $\{x \in \Re / 0<x<20\}$.
Um outro modo de obter o domínio é observar que a medida do lado do retângulo deve ser positiva e menor que a medida do diâmetro: 0 < x < 20.

B Fazemos um esboço qualquer do gráfico dadas as condições do problema:

Observando o gráfico: *f*(–4)=2 e *f*(4)=8.



MATEMÁTICA APLICADA

5

A Aldo, Beatriz e Carlos encontraram 8 bolinhas de tênis idênticas. De quantas maneiras podem reparti-las se cada amigo leva ao menos uma bolinha?

B Em um grupo de homens e mulheres em que o número de mulheres é o dobro do número de homens, 55% dos homens já viajaram ao exterior e 48% das mulheres nunca viajaram ao exterior. Qual é a probabilidade, expressa em porcentagem, de que uma pessoa do grupo, escolhida ao acaso, nunca tenha viajado ao exterior?

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

A Com esta tabela, podemos contar as possibilidades:

$$\begin{array}{llll} A & B & C & \\ 1 & 1 & 6 & \rightarrow \frac{3!}{2!}=3 \\ 2 & 2 & 4 & \rightarrow \frac{3!}{2!}=3 \\ 3 & 3 & 2 & \rightarrow \frac{3!}{2!}=3 \\ 1 & 2 & 5 & \rightarrow 3!=6 \\ 1 & 3 & 4 & \rightarrow 3!=6 \end{array}$$

São 21 possibilidades.

B Sejam x e $2x$ os números de homens e mulheres do grupo, respectivamente.
A probabilidade de que uma pessoa escolhida ao acaso no grupo nunca tenha viajado ao exterior é dada por:

$$\frac{0,45x-0,48(2x)}{3x}=\frac{1,41}{3}=0,47=47\%$$

MATEMÁTICA APLICADA

6 Se as raízes da equação $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ são p e q, quais são as raízes da equação $cx^2-bx+a=0$ $(c\neq 0)$, expressas em termos de p e q? Justifique sua resposta.

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

A A soma e o produto das raízes da equação $ax^2+bx+c=0$ são:

$$p+q=\frac{-b}{a}$$

$$pq=\frac{c}{a}$$

A soma e o produto das raízes da equação $cx^2+bx+a=0$ são:

$$S=\frac{b}{c}$$

$$P=\frac{a}{c}$$

Observe que: $P=\frac{1}{pq}=\frac{1}{p}.\frac{1}{q}=\frac{a}{c}$

$$S=\frac{-(p+q)}{pq}=\frac{-1}{p}+\frac{(-1)}{q}=\frac{b}{c}$$

As raízes são:

$$\frac{-1}{p} \quad e \quad \frac{-1}{q}$$

7

A Qual é o produto das soluções da equação: $\sqrt{5|x|+8}=\sqrt{x^2-16}$?

B Se *a*, *b*, *c* e *d* são números reais com $a-1=b+2=c-3=d+4$, qual é o maior dos quatro números?

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

A $Se \quad x \geq 0 \rightarrow 5x+8=x^2-16 \rightarrow x^2-5x-24=0 \rightarrow x=8$

$Se \quad x<0 \rightarrow -5x+8=x^2-16 \rightarrow x^2+5x-24=0 \rightarrow x=-8$

O produto das raízes reais da equação é (8) . (-8) = – 64.

B
$a-1=b+2 \rightarrow a-b=3 \rightarrow a>b$
$a-1=c-3 \rightarrow a-c=-2 \rightarrow a<c$
$a-1=d+4 \rightarrow a-d=5 \rightarrow a>d$

Observe: *a* é maior que *b* e que *d* e é menor que *c*.
O maior dos quatro números é *c*.

MATEMÁTICA APLICADA

8

A Determine as equações de todas as retas que passam pelo ponto P (2, 4) e tais que seus pontos de intersecção com os eixos estejam à mesma distância da origem.

B Quantos algarismos tem o produto $4^{18}.5^{27}$ escrito no sistema de numeração decimal?

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

A As equações das retas que passam pelo ponto P (2, 4) podem ser expressas por: y – 4=m (x – 2)

Eixo x: $y=0 \rightarrow -4=mx-2m \rightarrow x=\dfrac{2m-4}{m}$

Eixo y: $x=0 \rightarrow y=-2m+4$

Resolvemos a equação: $\left|\dfrac{2m-4}{m}\right|=\left|-2m+4\right| \rightarrow \left(\dfrac{2m-4}{m}\right)=\pm\left(-2m+4\right)$

Encontramos as raízes:
m = -1, m = 1 e m = 2.
y – 4 = -1 (x – 2) y = -x + 6 e
y – 4 = 1 (x – 2) y = x + 2
y – 4 = 2 (x –2) y = 2x

B $4^{18}.5^{27}=2^{36}.\dfrac{10^{27}}{2^{27}}=2^{9}.10^{27}=512.10^{27}$

Teríamos 3 algarismos do 512 e 27 zeros.
O produto tem 30 algarismos.

9

A Entre quais dois números inteiros e consecutivos está a soma: $\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}\right)}+\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{3}\right)}$?

B Se $a>1, x>0$ e $(2x)^{\log_a 2}-(3x)^{\log_a 3}=0$, qual é o valor de x?

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

A Mudando os logaritmos para a base 3 obtemos:

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{2}\right)+\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{5}\right)=\log_{3^{-1}}\left(2^{-1}\right)+\log_{3^{-1}}\left(5^{-1}\right)=\log_3 2+\log_3 5=\log_3 10$$

$$\log_3 10 \ \textit{é maior que } 2 \ \textit{pois } 3^2=9.$$
$$\log_3 10 \ \textit{é menor que } 3 \ \textit{pois } 3^3=27.$$

Está entre 2 e 3.

$$2<\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{3}\right)}+\frac{1}{\log_{\frac{1}{5}}\left(\frac{1}{3}\right)}<3$$

B

$$(2x)^{\log_a^2}=(3x)^{\log_a^3}$$

$$\log_a(2x)^{\log_a^2}=\log_a(3x)^{\log_a^3}$$

$$\log_a^2.\log_a(2x)=\log_a^3.\log_a(3x)$$

$$\log_a^2.\left(\log_a^2+\log_a^x\right)=\log_a^3.\left(\log_a^3+\log_a^x\right)$$

$$\left(\log_a^2\right)^2+\log_a^2.\log_a^x=\left(\log_a^3\right)^2+\log_a^3.\log_a^x$$

$$\log_a^x.\left(\log_a^2-\log_a^3\right)=\left(\log_a^3+\log_a^2\right).\left(\log_a^3-\log_a^2\right)$$

$$\log_a^x=\left(\log_a^3+\log_a^2\right).(-1)$$

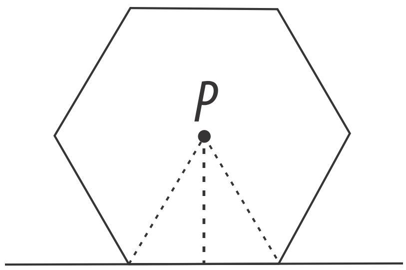
$$\log_a^x=\log_a^{6^{-1}} \rightarrow x=6^{-1}=\frac{1}{6}$$

MATEMÁTICA APLICADA

10 O centro de um hexágono regular é o ponto P (4, 2) e um lado se encontra sobre a reta de equação 4x – 3y + 5 = 0.

A Determine a área do hexágono regular.

B Determine a área total (expressa como um produto de dois fatores) e o volume de um prisma hexagonal regular de altura $5\sqrt{3}$ e que tem esse hexágono como uma de suas bases.



RESOLUÇÃO E RESPOSTA

A A distância do ponto P (4, 2) à reta de equação 4x – 3y + 5 = 0 é dada por:

$$d=h=\frac{|4.4-3.2+5|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{15}{5}=3$$

O lado do hexágono é dado por:

$$h^2+\left(\frac{l}{2}\right)^2=l^2\rightarrow\frac{3l^2}{4}=3^2\rightarrow l=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$$

A área do hexágono regular é igual a:

$$A=\frac{l^2\sqrt{3}}{4}.6=\frac{12\sqrt{3}}{4}.6=18\sqrt{3}$$

B A área total do prisma hexagonal regular é dada por: $6\left(2\sqrt{3}\right)\left(5\sqrt{3}\right)+2\left(18\sqrt{3}\right)=180+36\sqrt{3}=36\left(5+\sqrt{3}\right)$

O volume é igual a $\left(18.\sqrt{3}\right).\left(5\sqrt{3}\right)=270$.