2022

2º Semestre

BLOCO 3

- Matemática Aplicada

VESTIBULAR FGV

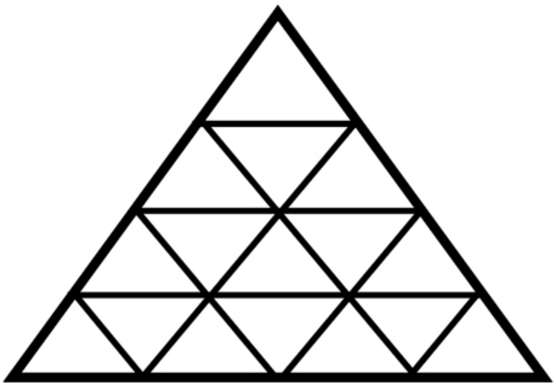
GRADUAÇÃO EM ADMINISTRAÇÃO – SP

29/05/2022

RESOLUÇÃO

Pergunta 1

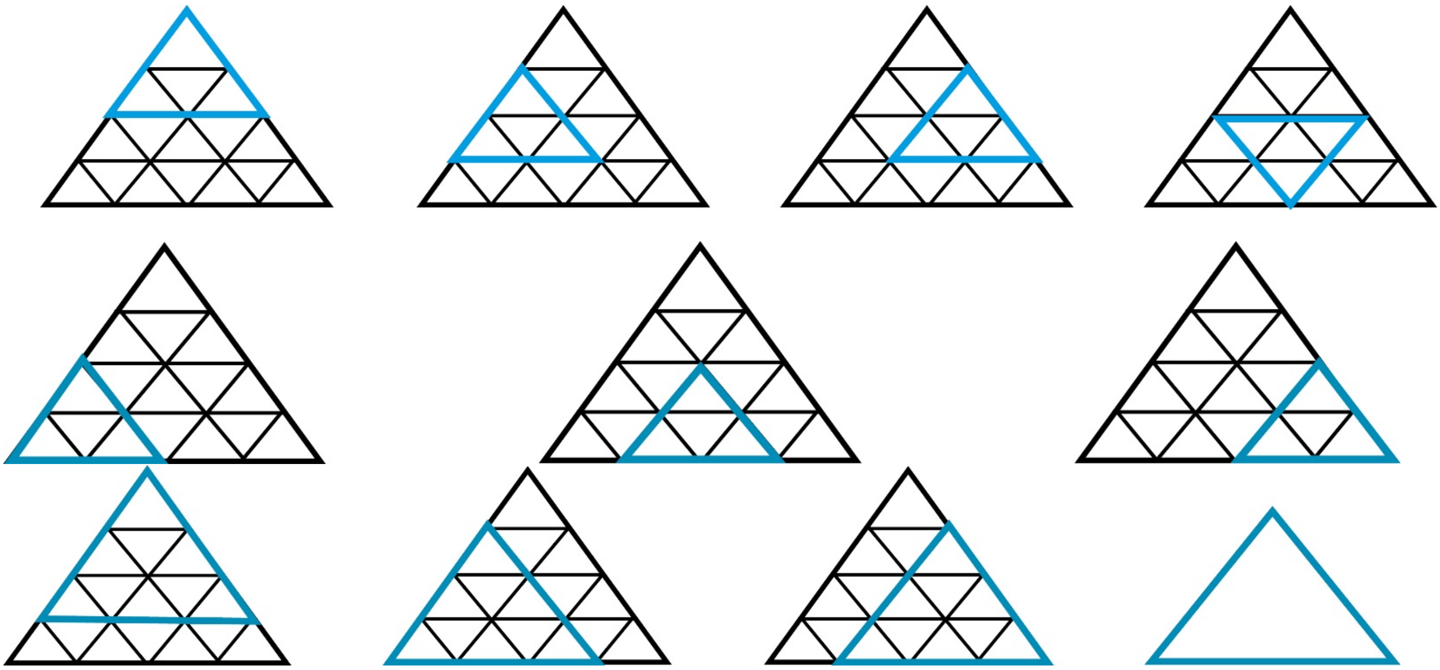
Quantos triângulos existem nesta figura?



Basta fornecer a resposta. Não é necessário apresentar o desenvolvimento da solução.

Resolução

Na solução, é mais conveniente se organizar para a contagem dos triângulos. Primeiro os triângulos pequenos, depois os medianos e por último o maior.
A partir dos 26 pequenos que se vêm, vamos encontrando os outros.



$16 + 11 = 27$ triângulos

Resposta: São 27 triângulos no total.

Pergunta 2

A Temos de criar uma senha de 10 caracteres que diferencie letras maiúsculas de letras minúsculas. Para que seja válida, o único requisito é que devem ser utilizadas somente estas letras, algarismos e símbolo:

2, 2, a, A, 8, 8, 8, @, x, y

Quantas senhas começam por 2 ou terminam em dois oitos? Justifique a sua resposta.

B Três amigos compraram juntos 8 bolas de tênis idênticas. De quantos modos podem reparti-las se cada amigo vai ficar ao menos com uma bola? Justifique a sua resposta.

Resolução

A

Senhas que começam por 2: $\frac{9!}{3!} = 60480$

Senhas que terminam em dois oitos: $\frac{8!}{2!} = 20160$

Senhas que começam por 2 e terminam em dois oitos: $7! = 5040$

Total: $60480 + 20160 - 5040 = 75600$

Resposta: 75 600 senhas

B

Uma tabela indica a resposta:

A	B	C
6	1	1
5	1	2
5	2	1
4	1	3
4	2	2
4	3	1
....		
1	6	1

Total: $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = \frac{(1+6).6}{2}$=21

Resposta: 21 modos

Pergunta 3

A Calcule a soma dos 31 primeiros termos de uma progressão aritmética sabendo que o décimo sexto termo é igual a 60.

B Escreva qual é o trigésimo termo da sequência $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$, $1 \leq n \leq 100$, dado seu termo geral:

$$a_n = n^2 + 1 + (n - 1)(n - 2)(n - 3)(n - 4)\ldots(n - 100)$$

Basta fornecer as respostas dos itens A e B. Não é necessário apresentar o desenvolvimento das soluções.

Resolução

A

$31x60 = 1860$

Resposta: 1860

B

$a_{30} = 30^2 + 1 + (0) = 901$

Resposta: 901

Pergunta 4

O número $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ - $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$ é um número racional ou um número irracional? Escreva-o na sua forma mais simples.

Basta fornecer a resposta. Não é necessário apresentar o desenvolvimento da solução.

Resolução

$n = \sqrt{3+2\sqrt{2}} - \sqrt{3-2\sqrt{2}}$
$n^2 = 3+2\sqrt{2}+3-2\sqrt{2}-2(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})$
$n^2 = 6 - 2(9 - 8) = 4$

Resposta: É o número racional positivo 2.

Pergunta 5

A Um ponto *P* dista 18 cm do centro de uma circunferência de 9 cm de raio. Qual é a medida em graus do ângulo que formam entre si as duas tangentes à circunferência traçadas desde o ponto *P*?

B Em um triângulo de medidas dos lados *a*, *b* e *c* verifica-se que:

$$(a+b+c)(a+b-c)=3ab$$

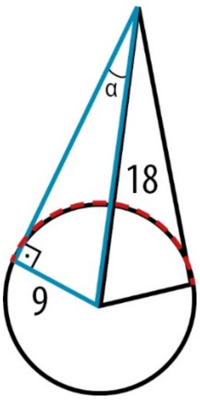
Qual é a medida do ângulo oposto ao lado de medida ***c***?

Basta fornecer as respostas dos itens A e B. Não é necessário apresentar o desenvolvimento das soluções.

Resolução

A

No triângulo da figura, temos que:



$$sen\ \alpha = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$
$$\alpha = 30^{\circ}$$

Resposta: A medida do ângulo entre as duas tangentes é $2\alpha = 60^{\circ}$.

B

Primeiro simplificamos a equação:

$$(a+b+c)(a+b-c) = 3ab$$
$$(a+b)^2 - c^2 - 3ab = 0$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - ab$$

O Teorema dos cossenos em qualquer triângulo nos permite afirmar que:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ \cos\alpha$$

Das duas equações, obtemos que:

$$a^2 + b^2 - ab = a^2 + b^2 - 2ab\ cos \propto$$
$$\cos \propto = \frac{1}{2}$$
$$\propto = 60^{\circ}$$

Resposta: A medida do ângulo é 60°.

Pergunta 6

A Se $(\log_b a)^2 + (\log_a b)^2 = 47$, qual é o valor numérico positivo da expressão $\log_b a + \log_a b$?

B Entre quais dois números inteiros e consecutivos está o número $\frac{1}{\log_{\left(\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{3}\right)} + \frac{2}{\log_{\left(\frac{1}{4}\right)}\left(\frac{1}{3}\right)}$?

Basta fornecer as respostas dos itens A e B. Não é necessário apresentar o desenvolvimento das soluções.

Resolução

A

$$(\log_b a + \log_a b)^2 = (\log_b a)^2 + (\log_a b)^2 + 2\log_b a \,.\log_a b;$$

$$(\log_b a + \log_a b)^2 = 47 + 2 = 49$$

Resposta: 7

B

Mudamos os dois logaritmos para a base 3.

Note que $\log_3 \frac{1}{3} = -1$. Portanto:

$$\frac{\log_3 \frac{1}{2}}{-1} + 2.\frac{\log_3 \frac{1}{4}}{-1} = \log_3 2 + 2.\log_3 4 = \log_3 2 + \log_3 16 = \log_3 32$$

Resposta: Está entre os inteiros consecutivos 3 e 4, pois: $3^3 = 27$ e $3^4 = 81$.

Pergunta 7

A Considere todos os números de três algarismos formados com os algarismos 1, 2, 4 e 8. Se os ordenamos em ordem **decrescente** que posição ocupa o número 222? Justifique a resposta.

B Em uma classe do 1º ano do Ensino Médio, 80% dos alunos foram aprovados em matemática, somente 40% foram aprovados em Física e 30% foram aprovados nas duas matérias. Se escolhemos um aluno ao acaso, qual é a probabilidade de que tinha sido aprovado ao menos em uma das duas disciplinas? Justifique a resposta.

Resolução

A

São $4^3 = 64$ os números de três algarismos que podemos formar.

Vamos contar quantos são os termos da sequência decrescente que aparecem antes do 222.

. Começando por 8: $4 \times 4 = 16$

. Começando por 4: $4 \times 4 = 16$

. Começando por 28 temos os números: 288; 284; 282; 281

. Começando por 24 temos os números 248; 244; 242; 241

. Começando por 22 temos os números: 228 e 224

Temos no total $16 + 16 + 4 + 4 + 2 = 42$ termos que vêm antes do 222.

Resposta: 43ª

B

Representamos assim:

. A: ser aprovado em Matemática
. B: ser aprovado em Física

Do enunciado, deduzimos que:

$P(A) = 0{,}8 \qquad P(B) = 0{,}4 \qquad P(A \cap B) = 0{,}3$
$P(A \cup B) = 0{,}8 + 0{,}4 - 0{,}3 = 0{,}9$

Resposta: 90% dos alunos foram aprovados em pelo menos uma das duas disciplinas.

Pergunta 8

A Considere os números naturais 1!, 2!, 3!... 100! Se escolhermos um deles, ao acaso, qual é a probabilidade de ser um número que não termina em zero? Justifique a resposta.

B O número 100! termina em quantos zeros? Justifique a resposta.

Resolução

A
Observe;

$1! = 1$ $2! = 2$ $3! = 6$ $4! = 24$ $5! = 120$

A partir do momento em que aparece um zero no final, todos os outros fatoriais terminarão em zero. Assim a probabilidade de ser um número que não termina em 0 é igual a:

$$\mathbf{\frac{4}{100}}$$

Resposta: $\frac{4}{100}$ ou 0,04 ou 4%

B
Observe que que, quando aparece um 0, ele não desaparece mais. E que o zero aparece quando um dos fatores é $10 = 2 \times 5$.

Entre os 100 primeiros números, temos 20 múltiplos de 5 que acrescentam um 0 cada um e 4 múltiplos de 25: $5 \times 5 = 25$, que aportam dois 0 cada um.

Resposta: $20 + 4 = 24$ zeros.

Pergunta 9

A reta de equação $y = mx$ divide o triângulo de vértices (0, 0), (2, 2) e ($4m$, 0) em dois triângulos de áreas iguais.

A Quais são as coordenadas, em termos de m, do ponto de intersecção da reta $y = mx$ com a reta que contém os pontos (2, 2) e ($4m$, 0)?

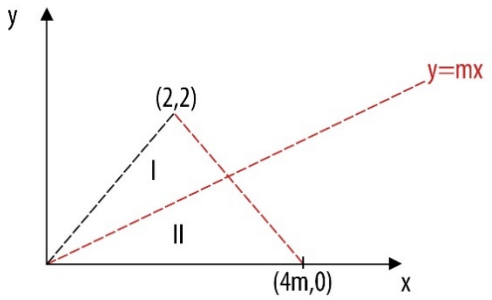
B Considerando os dois triângulos de áreas iguais, qual é a soma de todos os valores possíveis de m?

Basta fornecer as respostas dos itens A e B. Não é necessário apresentar o desenvolvimento das soluções.

Resolução

Modo I

A



A altura do triângulo de vértices (0, 0), (2, 2) e (4m, 0), em relação ao lado de extremidades (2, 2) e (4m, 0) é exatamente a mesma para os triângulos I e II. Como eles têm a mesma área, é fácil ver que são congruentes e, portanto, o ponto de intersecção é também o ponto médio desse lado.

((2+4m)/2,(2+0)/2)

Resposta: (2m +1, 1)

B

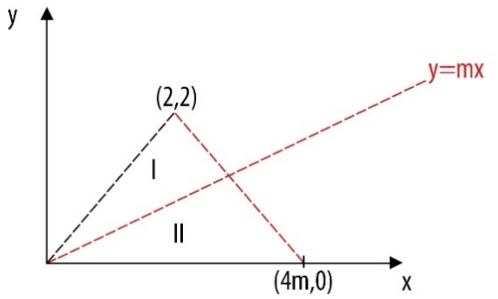
O ponto médio pertence à reta y=mx. Portanto:
$1 = m\,(2m + 1)$
$2m^2 + m - 1 = 0$

A soma das raízes (-b)/a é a soma dos possíveis valores de m.

Resposta: (-1)/2

Modo II

A



. A declividade do segmento de extremos (2, 2) e (4m, 0) é igual a: $\frac{2-0}{2-4m} = \frac{1}{1-2m}$

. A equação da reta que contém esse segmento é dada por:

$$y - 0 = \frac{1}{1-2m}(x - 4m)$$

Ou seja: $y = \frac{x-4m}{1-2m}$

. Resolvemos o sistema de equações $y = \frac{x-4m}{1-2m}$ e $y = mx$

para obter: $x = \frac{4m}{2m^2-m+1}$ e $y = \frac{4m^2}{2m^2-m+1}$

Resposta: $(\frac{4m}{2m^2-m+1}, \frac{4m^2}{2m^2-m+1})$

B

. A área do triângulo de vértices (0, 0), (2, 2) e (4m, 0) é igual a: $\frac{4m.2}{2} = 4m.$

. As áreas dos outros dois triângulos são iguais a 2m.

A área do triângulo II é igual a:

$$\frac{1}{2}(4m).\frac{4m^2}{2m^2-m+1}$$

. Simplificamos a equação:

$$\frac{1}{2}(4m).\frac{4m^2}{2m^2-m+1} = 2m$$

e obtemos:

$$2m^2 + m - 1 = 0$$

cuja soma das raízes é: $\frac{-b}{a} = \frac{-(+1)}{2}$

Na resolução, note que consideramos $m > 0$. Se considerarmos $m < 0$ vamos obter a mesma resposta, pois a única diferença é no final do problema:

$$\frac{1}{2}(-4m).\frac{4m^2}{2m^2-m+1} = -2m$$

Resposta: -$\frac{1}{2}$

Pergunta 10

Determine o termo geral da soma:

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}$$

Sugestão: $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

Basta fornecer a resposta. Não é necessário apresentar o desenvolvimento da solução.

Resolução

Observe que podemos expressar a soma assim:

$$(\frac{1}{1}-\frac{1}{2})+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+(\frac{1}{3}-\frac{1}{4})+\cdots+(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1})$$

Observe que a fração que aparece com o sinal – em cada parênteses aparece com o sinal + no seguinte. Assim cancelamos todas as frações com exceção da primeira e última. Portanto:

$$S=\frac{1}{1}-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$$

Resposta: $\frac{n}{n+1}$