2021

1º Semestre

Módulo Discursivo

BLOCO 4

- Matemática Aplicada

VESTIBULAR FGV

UNIFICADO

22/11/2020

RESOLUÇÃO

MATEMÁTICA APLICADA

1 Considere a equação $(x^2 - 26)^4 = 10000$.

Quantas e quais são as raízes reais dessa equação?

Basta fornecer a resposta. Não é necessário apresentar o desenvolvimento da solução.

Respostas esperadas:
São quatro raízes reais: -6, -4, 4, 6.

Justificativas:
Tem-se: $(x^2 - 26)^4 = 10000 \Rightarrow x^2 - 26 = \pm\sqrt[4]{10000} \Rightarrow x^2 - 26 = \pm 10$.
Se $x^2 - 26 = 10$, então $x^2 = 36$ e, portanto, $x = 6$ ou $x = -6$.
Se $x^2 - 26 = -10$, então $x^2 = 16$ e, portanto, $x = 4$ ou $x = -4$.
São, portanto, quatro raízes reais: -6, -4, 4, 6.

2 Em uma Escola da FGV, em cada disciplina, os alunos recebem duas notas, de 0 (zero) a 10 (dez) cada uma, chamadas A1 e A2. Para ser aprovado, cada aluno tem que obter média aritmética no mínimo igual a 6,0 com as notas A1 e A2.

Na disciplina de Cálculo em uma Variável, as notas A1 e A2 correspondem cada uma delas à média ponderada de um Teste e de uma Prova com pesos, respectivamente, 3 e 7, isto é, a nota A1 é a média ponderada do Teste T1 com a Prova P1 e a nota A2 é a média ponderada do Teste T2 com a Prova P2.

Um aluno obteve as seguintes notas até o momento:

T1	7,0
P1	4,8
T2	5,0

Qual é a nota mínima que esse aluno tem que tirar na Prova P2 para ser aprovado?

Basta fornecer a resposta. Não é necessário apresentar o desenvolvimento da solução.

Resposta esperada: 7,2

Justificativa:

Para ser aprovado: $\frac{A1+A2}{2}\geq 6{,}0 \Rightarrow A1+A2\geq 12{,}0 \Rightarrow \frac{3T1+7P1}{10}+\frac{3T2+7P2}{10}\geq 12{,}0 \Rightarrow 21{,}0+33{,}6+15{,}0+7P2\geq 120{,}0$.

Daí: $7P2\geq 50{,}4 \Rightarrow P2\geq 7{,}2$.

Logo, a nota mínima a ser tirada na P2 é 7,2.

3 Um losango tem perímetro 2020 e uma de suas diagonais mede 808.

a) Quanto mede a outra diagonal do losango?

b) Qual a área desse losango?

Basta fornecer as respostas. Não é necessário apresentar o desenvolvimento das soluções.

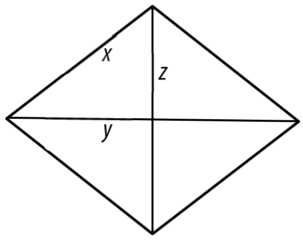
Respostas esperadas:

a) 606.

b) 244824.

Justificativa:

Sendo x a medida do lado desse losango, tem-se $4x = 2020$ e, portanto, $x = 505$.
As diagonais de um losango são perpendiculares e cortam-se ao meio.
Assim, sendo $2y$ e $2z$ os comprimentos das diagonais, tem-se que x, y e z são as medidas da hipotenusa e dos catetos, respectivamente, de um triângulo retângulo.



Sendo $2y = 808$ ($y = 404$), tem-se que $z = \sqrt{505^2 - 404^2} = \sqrt{(505+404)(505-404)} = \sqrt{909 \times 101} = 3 \times 101 = 303$.

Logo, a outra diagonal do losango mede 606 e a área do losango mede $\dfrac{808 \times 606}{2} = 24 \times 101^2 = 244824$.

OBS.: O candidato também pode perceber que 505 = 5 x 101 e 404 = 4 x 101 e inferir que o outro cateto do triângulo retângulo é 3 x 101 = 303.

4 Considere uma pirâmide quadrangular com vértice *V*, cuja altura mede 6 cm e cuja base é um quadrilátero convexo qualquer de 36 cm^2 de área.

Seja *VA* uma de suas arestas laterais e seja *M* um ponto sobre a aresta *VA* dividindo-a na razão $VM : MA = 1 : 2$.

Considere agora a pirâmide cujo vértice é o ponto *M* e cuja base é o polígono convexo formado pelos pontos médios das arestas da base da pirâmide quadrangular dada.

a) Que tipo de quadrilátero convexo é a base dessa nova pirâmide?

b) Quanto mede, em cm^2, a área da base dessa nova pirâmide?

c) Quanto mede, em cm, a altura dessa nova pirâmide?

d) Quanto mede, em cm^3, o volume dessa nova pirâmide?

Basta fornecer as respostas. Não é necessário apresentar o desenvolvimento das soluções.

Respostas esperadas:

a) Paralelogramo.
b) 18 cm^2.
c) 4 *cm*.
d) 24 cm^3.

Justificativas:

a) Qualquer que seja o quadrilátero convexo que forma a base da pirâmide quadrangular dada, os pontos médios de suas arestas formam um paralelogramo.
b) A área do paralelogramo formado é a metade da área do quadrilátero original. Assim, a área da base da nova pirâmide é metade da área da base da pirâmide quadrangular dada, isto é, 18 cm^2.
c) Como *M* divide a aresta lateral *VA* na razão $VM : MA = 1:2$, então a altura da nova pirâmide será 2/3 da altura original, isto é, 2/3 de 6 = 4 *cm*.
d) O volume da nova pirâmide é (1/3)x18x4=24 cm^3.

5 A função f definida sobre os números inteiros positivos tem as seguintes propriedades:

1) $f(1) = 0$

2) $f(p) = 1$, se p é primo

3) $f(x \cdot y) = f(x) + f(y) - f(mdc(x, y))$, onde $mdc(x, y)$ é o máximo divisor comum entre x e y

a) Mostre que, se n é o produto de dois números primos distintos, então $f(n) = 2$.

b) Determine $f(2020)$.

Respostas esperadas:

a) Seja $n = p_1 \cdot p_2$, com p_1 e p_2 primos diferentes. Assim, $mdc(p_1, p_2)=1$ e, portanto:

$$f(n)=f(p_1 \cdot p_2)=f(p_1)+f(p_2)-f(1)=1+1-0=2$$

b) Fatorando 2020 em fatores primos, tem-se: $2020 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101$

Portanto, $f(2020)=f(2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 101)=f(2 \cdot 2)+f(5 \cdot 101)$, já que $mdc(4,505)=1$ e $f(1)=0$.

Mas, $f(2 \cdot 2)=f(2)+f(2)-f(2)=f(2)=1$, pois 2 é primo, e $f(5 \cdot 101)=f(5)+f(101)=2$, pois 5 e 101 são primos diferentes (item a).

Logo, $f(2020)=f(2 \cdot 2)+f(5 \cdot 101)=1+2=3$.

Obs.: No item b, o aluno pode dar apenas a resposta sem a justificativa.

6 Considere todos os 49 pontos do plano cartesiano cujas coordenadas são os números naturais de 0 a 6.

Seja *G* (3, 3) o centro do quadrado de vértices *A* (0, 0), *B* (0, 6), *C* (6, 6) e *D* (6, 0).

a) Quantos são os eixos de simetria do quadrado *ABCD*?

Sorteia-se, aleatoriamente, entre os 48 pontos diferentes de *G*, um ponto *H*.

b) Qual a probabilidade de a reta definida pelos pontos *G* e *H* caracterizar um eixo de simetria do quadrado *ABCD*?

Basta fornecer as respostas. Não é necessário apresentar o desenvolvimento das soluções.

Respostas esperadas:

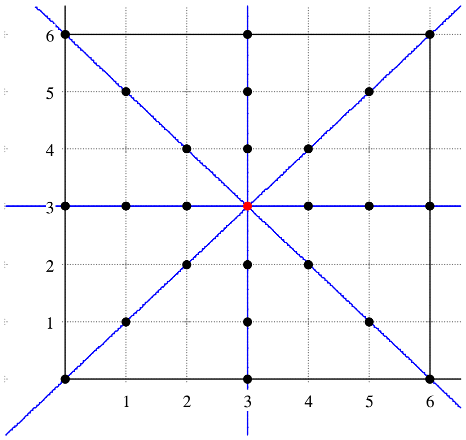
a) 4 (quatro).

b) ½ ou 50%.

Justificativas:

a) Há 4 eixos de simetria do quadrado, que são as retas $y = x$, $x+y = 6$, $x = 3$ e $y = 3$, conforme figura.

b) Sobre cada um desses eixos há 6 pontos além do ponto *G*, centro do quadrado. São, portanto, 24 pontos favoráveis entre os 48 pontos possíveis. Logo, a probabilidade pedida é $\frac{24}{48} = \frac{1}{2}$.



7 Em um parque de diversões, os frequentadores compram, na entrada, fichas de quatro tipos diferentes, que serão usadas para o acesso aos diversos aparelhos de diversão do parque. Os quatro tipos de ficha correspondem a quatro valores diferentes: 1\$, 2\$, 5\$ e 10\$.
Imagine que você comprou várias fichas de todos os valores, mas agora não lembra qual é o valor associado a cada tipo de ficha e não quer perguntar a ninguém. Então, você vê uma máquina que vende "algodão doce" por 1\$ cada um. A máquina só vende um "algodão doce" por vez e fornece troco (em fichas), quando necessário, para qualquer tipo de ficha que você coloque nela. É possível fazer várias compras em sequência.

a) Se você fizer uma compra na máquina inserindo uma ficha e a máquina fornecer uma única ficha como troco, que conclusões sobre os valores associados às fichas (a que você colocou e a que a máquina devolveu como troco) você pode tirar?

b) Se você fizer duas compras na máquina usando fichas diferentes e receber duas fichas iguais de troco em uma delas e não receber troco na outra, explique como é possível identificar o valor associado a cada um dos quatro tipos de ficha.

c) Suponha que você faça três compras na máquina usando fichas diferentes. Explique como você pode, a partir dos trocos obtidos nas três compras, identificar os valores associados a cada um dos quatro tipos de ficha.

Respostas esperadas:

a) A única possibilidade de receber uma única ficha de troco é inserindo uma ficha de 2\$ e recebendo de troco uma ficha de 1\$.
Assim, o valor associado à ficha que foi inserida na máquina é 2\$ e o da ficha recebida como troco é 1\$.

b) A única possibilidade de receber apenas duas fichas iguais como troco é inserindo uma ficha de 5\$ e recebendo duas fichas de 2\$. Assim, identificaríamos as fichas correspondentes a 2\$ e 5\$. A única ficha que não requer troco é a ficha de 1\$ e, assim, também identificaríamos a ficha correspondente a esse valor. A ficha diferente dessas três já identificadas é a que corresponde a 10\$.

c) Tem-se:
   - i) Se a máquina der troco para as três fichas usadas, então o tipo de ficha que não foi usado é o de 1\$. Se a máquina não der troco para alguma das três fichas usadas, então essa é a de 1\$. Assim, identifica-se a ficha de 1\$.
   - ii) Se a máquina der apenas uma ficha de troco para alguma das três fichas usadas, então essa é a de 2\$. Se não, então o tipo de ficha que não foi usado é o de 2\$. Assim, identifica-se a ficha de 2\$.
   - iii) Tendo identificados os tipos de 1\$ e de 2\$, se a máquina der troco de 1\$,1\$,1\$,1\$ ou 1\$,1\$,2\$ ou 2\$,2\$ então a ficha usada é de 5\$. Se não, então o tipo de ficha que não foi usado é o de 5\$. Identificados os tipos de 1\$, 2\$ e 5\$, o quarto tipo é o de 10\$.

8 Considere uma função f, definida no conjunto dos números reais, tal que $f(x) = teto\,(abs\,(x)) - abs\,(teto\,(x))$, onde $abs\,(x)$ representa o valor absoluto (ou módulo) do número real x e $teto\,(x)$ representa o menor número inteiro que é maior ou igual ao número real x.

a) Qual o valor de $f\,(2,5)$?

b) Qual o valor de $f\,(-2)$?

c) Mostre que se x é um número real negativo não inteiro, então $f(x) = 1$.

Respostas esperadas:

a) $f\,(2,5)=0$ (zero).
b) $f(-2)=0$ (zero).
c) Tem-se que, sendo i um inteiro positivo, se $-i<x<-i+1$ então $teto(x)=-i+1$ e $i-1<-x<i$ e, portanto, $teto(-x)=i$.
Assim, $f(x)=teto(abs(x))-abs(teto(x)=teto(-x)-abs(-i+1)=i-(i-1)=1$.

Justificativas:

a) $f(2,5)=teto(abs(2,5))-abs(teto(2,5))=teto(2,5)-abs(3)=3-3=0$
b) $f(-2)=teto(abs(-2))-abs(teto(-2))=teto(2)-abs(-2)=2-2=0$

9 Em um triângulo ABC, um ponto D, pertencente ao lado AB, divide-o na razão $\frac{AD}{DB}=\frac{1}{3}$.

Sejam M o ponto médio do segmento CD e P a interseção da reta definida pelos pontos A e M com o lado BC.

a) Sendo X a área do triângulo AMC, quanto medem, em função de X, as áreas dos triângulos AMD e DMB, respectivamente?

b) Sabendo-se que a área do triângulo CMP mede 12, quanto mede a área do triângulo ABC ?

Basta fornecer as respostas. Não é necessário apresentar o desenvolvimento das soluções.

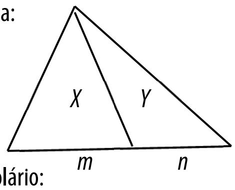
Respostas esperadas:

a) X e $3X$, respectivamente.
b) 160.

Justificativas:

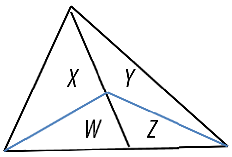
Resolução:

Lema:



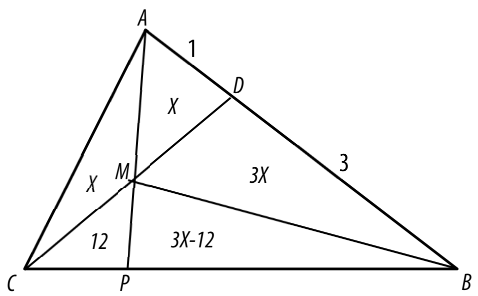
$\frac{X}{m}=\frac{Y}{n}$, onde X e Y são as áreas das regiões correspondentes e m e n são os comprimentos dos segmentos correspondentes.

Corolário:



$$\frac{X+W}{W}=\frac{Y+Z}{Z}$$

Assim, tem-se:



Daí: $\frac{X+12}{12}=\frac{7X-12}{3X-12} \rightarrow 3X^2-60X=0 \rightarrow X=20$, pois $X=0$ não satisfaz.

Logo, a área do triângulo ABC é $S_{ABC}=8X=160$ unidades de área.

Outra resolução para o item b:

Traçando por D uma paralela DE a AP.

No triângulo ABP, DE = ¾ AP. No triângulo CDE, MP = ½ DE. Logo MP = 3/8 AP, ou seja, M divide AP na razão AM:MP=5: 3.

Daí, X = (5/3)x12 = 20 e o resto segue igual à resolução anterior..

10 Maria dispõe de uma grande quantidade de caixas e de bolas. Em cada caixa, cabem 3 bolas.
As caixas são numeradas sequencialmente 1, 2, 3, 4, ... e colocadas em ordem crescente da esquerda para a direita.
Maria, então, executa um procedimento repetitivo em que, a cada repetição, coloca uma bola em alguma caixa, de acordo com as seguintes regras:
1) Cada bola é colocada na primeira caixa, da esquerda para a direita, em que couber.
2) Quando uma caixa está vazia e se coloca uma bola nela, todas as caixas à esquerda dela (se houver) são esvaziadas.

Por exemplo, a primeira bola a ser colocada na caixa 2, pela primeira vez, é a 4ª bola colocada por Maria.

a) Qual a ordem da primeira bola que Maria coloca na caixa 3, pela primeira vez?

b) E na caixa 4?

c) Em que caixa será colocada, por Maria, a 2020ª bola?

Basta fornecer as respostas. Não é necessário apresentar o desenvolvimento das soluções.

Respostas esperadas:

a) 10ª bola.
b) 22ª bola.
c) Caixa 3.

Justificativas:

a) Ao colocar a primeira bola na caixa 2, a caixa 1 é esvaziada. Assim, a segunda bola a ser colocada na caixa 2 é a 8ª, a terceira é a 9ª e a primeira a ser colocada na caixa 3 é a 10ª bola (2 x 4 + 2 = 10).
b) Ao colocar a primeira bola na caixa 3, as caixas 1 e 2 são esvaziadas. Assim, a segunda bola a ser colocada na caixa 3 é a 20ª, a terceira é a 21ª e a primeira a ser colocada na caixa 4 é a 22ª bola (2 x 10 + 2 = 22).
c) De maneira geral, sendo a_n a ordem da primeira bola a ser colocada pela primeira vez na caixa *n*, tem-se que: $a_n = 2 \cdot a_{n-1} + 2$, sendo $a_1 = 1$. Daí, tem-se que $a_n - a_{n-1} = 2 \cdot (a_{n-1} - a_{n-2})$ e, como $a_2 - a_1 = 3$ tem-se que $a_n - a_{n-1} = 2^{n-2} \cdot 3$.

Assim, tem-se:

$a_2 - a_1 = 3$

$a_3 - a_2 = 3 \cdot 2$

$a_4 - a_3 = 3 \cdot 2^2$

$\cdots$

$a_{n-1} - a_{n-2} = 3 \cdot 2^{n-3}$

$a_n - a_{n-1} = 3 \cdot 2^{n-2}$

Somando-se essas igualdades, tem-se: $a_n - a_1 = 3 \cdot (1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2}) \to a_n = 1 + 3 \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} \to a_n = 3 \cdot 2^{n-1} - 2$.

A primeira bola a ser colocada na caixa 10 será a de ordem $3 \cdot 2^9 - 2 = 1534$. Nesse momento, as nove primeiras caixas serão esvaziadas e, como 2020 – 1534 = 486, a 2020ª bola será colocada na mesma caixa que a 486ª bola.

Por sua vez, a primeira bola colocada na caixa 8 é a de ordem $3 \cdot 2^7 - 2 = 382$, quando, então serão esvaziadas as sete primeiras caixas e, como 486 – 382 = 104, a 486ª bola será colocada na mesma caixa que a 104ª bola.

Por sua vez, a primeira bola colocada na caixa 6 é a de ordem $3 \cdot 2^5 - 2 = 94$, quando, então serão esvaziadas as cinco primeiras caixas e, como 104 – 94 = 10, a 104ª bola será colocada na mesma caixa que a 10ª bola, que como sabemos pelo item a) é colocada na caixa 3.

Logo, a 2020ª bola será colocada por Maria na caixa 3.

Fim da Prova de Matemática Aplicada.