MATEMÁTICA APLICADA

1 Em um curso de graduação, 40% dos alunos estão no 2º período, 30% estão no 4º período, 20% estão no 6º período e os demais estão no 8º período. Na disciplina eletiva História da Matemática, estão inscritos 10% dos alunos do 2º período, 20% dos alunos do 4º período, 30% dos alunos do 6º período e 40% dos alunos do 8º período. Dos alunos inscritos na disciplina História da Matemática, qual é a porcentagem daqueles que são do 8º período?

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

Sendo N o número de alunos desse curso de graduação, a quantidade de alunos por período e a quantidade de inscritos por período são:

2º período: 0,4N inscritos: 0,1 x 0,4N = 0,04N
4º período: 0,3N inscritos: 0,2 x 0,3N = 0,06N
6º período: 0,2N inscritos: 0,3 x 0,2N = 0,06N
8º período: 0,1N inscritos: 0,4 x 0,1N = 0,04N

Portanto, a porcentagem de inscritos que são do 8º período é $\dfrac{0,04N}{0,04N+0,06N+0,06N+0,04N}=\dfrac{0,04N}{0,20N}=\dfrac{4}{20}=\dfrac{20}{100}=20\%$.

2 Ao somar as medidas dos ângulos internos de um polígono convexo, Arquimedes encontrou 2018º. Fazendo uma conferência dos seus cálculos, Arquimedes descobriu que havia esquecido de somar a medida de um dos ângulos.

A Qual a medida, em graus, do ângulo que Arquimedes havia esquecido?

B Quantos lados tinha o tal polígono?

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

A A soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados é $180^0\ (n-2)$ e, portanto, sempre um múltiplo de 180º.

Assim, como $2018 = 180 \times 11 + 38$, Arquimedes esqueceu de somar um ângulo cuja medida é $180^0 - 38^0 = 142^0$.

B A soma correta é, portanto, $2018^0 + 142^0 = 2160^0 = 180^0 \times 12$.

Logo, $n - 2 = 12 \Rightarrow n = 14$, isto é, o polígono tinha 14 lados.

MATEMÁTICA APLICADA

3 A lista $[5, 6, 35, 37, 38, 40, 41, 41, 48, 52]$ tem mediana $Q_2 = 39$ (segundo quartil), primeiro quartil $Q_1 = 35$ e terceiro quartil $Q_3 = 41$. O intervalo interquartílico (IQ) da lista é definido como $IQ = Q_3 - Q_1$. Um *outlier* da lista é definido como um elemento da lista que é menor do que $Q_1 - 1,5 \times (IQ)$ ou maior do que $Q_3 + 1,5 \times (IQ)$.
Determine os *outliers* da lista dada.

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

Tem-se: $IQ = Q_3 - Q_1 = 41 - 35 = 6$.

Assim, $Q_1 - 1,5 \times (IQ) = 35 - 1,5 \times 6 = 35 - 9 = 26$ e $Q_3 + 1,5 \times (IQ) = 41 + 1,5 \times 6 = 41 + 9 = 50$.
Logo, os outliers são 5, 6, e 52.

4 Para quaisquer números reais a e b, com $b \neq 0$, definimos $resto(a, b) = a - b \times \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$, onde $\left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$ significa o maior número inteiro que é menor ou igual a $\frac{a}{b}$. Calcule:

A $resto(2018, 17)$;

B $resto\left(\frac{17}{8}, \frac{-3}{2}\right)$.

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

A Tem-se: $\left\lfloor \frac{2018}{17} \right\rfloor = 118$. Assim: $resto(2018, 17) = 2018 - 17 \times 118 = 2018 - 2006 = 12$.

B Tem-se: $\left\lfloor \frac{\frac{17}{8}}{\frac{-3}{2}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{-34}{24} \right\rfloor = -2$. Assim: $resto\left(\frac{17}{8}, \frac{-3}{2}\right) = \frac{17}{8} - \left(\frac{-3}{2}\right) \times (-2) = \frac{17}{8} - 3 = \frac{17 - 24}{8} = \frac{-7}{8}$.

MATEMÁTICA APLICADA

5 Um fino pedaço de madeira, homogêneo e com espessura constante, tem o formato de um triângulo equilátero de lado 4 cm e pesa 20 gramas. Um outro pedaço da mesma madeira, com a mesma espessura e também homogêneo, tem o formato de um triângulo equilátero de lado 12 cm. Quanto pesa esse segundo pedaço de madeira?

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

Como os dois pedaços de madeira são homogêneos e têm a mesma espessura, seus pesos são proporcionais às áreas de suas bases. Como as bases são polígonos semelhantes (já que são triângulos equiláteros), a razão entre suas áreas é igual ao quadrado da razão entre os lados dos triângulos.

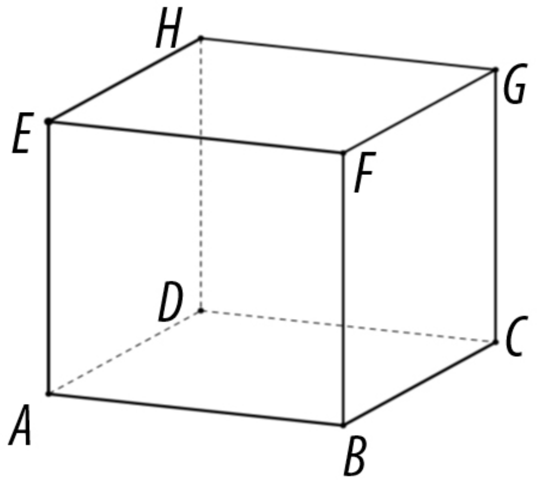
Assim, $\frac{P_2}{P_1} = \frac{A_2}{A_1} = \left(\frac{12}{4}\right)^2 = 9 \Rightarrow P_2 = 9 \times P_1 = 9 \times 20 = 180$ gramas.

MATEMÁTICA APLICADA

6 Em cada um dos oito vértices de um cubo, é colocado um dos números inteiros de 1 a 8. Cada número é usado uma única vez e de tal forma que a soma dos números nos quatro vértices de cada face do cubo seja sempre a mesma soma S.

A Determine o valor de *S*.

B Há mais de uma maneira de colocar os números de 1 a 8 satisfazendo as restrições dadas. Fixando A=3, B=8 e G=4, mostre uma das maneiras de fazê-lo, associando os vértices C, D, E, F e H, na figura ao lado, aos números 1, 2, 5, 6 e 7 na ordem desejada.



RESOLUÇÃO E RESPOSTA

A Como as somas dos números colocados nos vértices de cada face tem que ser sempre igual a S, então as somas dos números nas faces opostas ABCD e EFGH têm que ser iguais a S. Logo, deve-se ter $2S = A+B+C+D+E+F+G+H = 1+2+3+4+5+6+7+8 = 36$.
Assim, S = 18.

B Fixando A=3, B=8 e G=4, há duas maneiras de numerar os vértices restantes:
C=1, D=6, E=2, F=5, H=7 ou C=5, D=2, E=6, F=1, H=7

7 Considere um segmento de reta *AB* de comprimento igual a 4 cm, no espaço tridimensional. Calcule o volume do sólido formado por todos os pontos do espaço tridimensional cuja distância ao segmento *AB* é no máximo 2 cm.

OBS.: Dados um segmento de reta *AB* e um ponto *P* do espaço tridimensional, define-se a distância de *P* ao segmento *AB* como sendo a distância de *P* ao ponto do segmento *AB* que está mais próximo de *P*.

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

O sólido descrito no enunciado é a união de um cilindro reto com raio da base igual a 2 cm e altura igual a 4 cm com duas semiesferas de bases coincidentes com as bases do cilindro, isto é, duas semiesferas de raio 2 cm.
Logo, o volume pedido é igual ao volume do cilindro (área da base vezes a altura) mais o volume de uma esfera (duas semiesferas).

Tem-se: $V = \pi r^2 h + \dfrac{4\pi r^3}{3} = \pi \cdot 2^2 \cdot 4 + \dfrac{4 \cdot \pi \cdot 2^3}{3} = 16\pi + \dfrac{32\pi}{3} = \dfrac{80\pi}{3}$ cm^3.

8 Considere uma função f, definida no conjunto dos inteiros positivos, tal que:

- $f(1)=1$;
- $f(n)=2f(n-1)+1$, se n é par;
- $f(n)=f(n-2)+3$, se n é ímpar maior do que 1.

A Calcule $f(2017)$.

B Calcule $f(2018)$.

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

A Tem-se:

$f(1)=1$

$f(3)=f(1)+3=4$

$f(5)=f(3)+3=7$

$f(7)=f(5)+3=10$

...

Assim, a sequência dos valores de f para n ímpar forma uma PA de primeiro termo igual a 1 e razão igual a 3.

$f(2017)$ é o termo de ordem $(2017+1)/2=1009$ dessa PA.

Logo: $f(2017)=1+(1009-1)\times 3=1+3024=3025$.

B Tem-se: $f(2018)=2f(2017)+1=6050+1=6051$.

9 Considere os conjuntos $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, $B=\{1,2,3,4,5\}$ e $C=\{2,3,4,5,6\}$.

Como se sabe, o conjunto *A* tem ao todo $2^6=64$ subconjuntos. Determine quantos são os subconjuntos de *A* que **NÃO SÃO** subconjuntos nem de *B* nem de *C*.

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

Para que um subconjunto de *A* não seja subconjunto de *B*, um de seus elementos terá que ser obrigatoriamente o "6" e para que um subconjunto de *A* não seja subconjunto de *C* , um de seus elementos terá que ser obrigatoriamente o "1".

Assim, os subconjuntos de *A* que não são subconjuntos de *B* nem de *C* são aqueles que têm os números "1" e "6" como elementos, obrigatoriamente.

São eles:

i) Subconjuntos com dois elementos: somente $\{1,6\}$;

ii) Subconjuntos com três elementos: $\{1,6,\_\}$. Há $C_4^1=4$ escolhas para o terceiro elemento;

iii) Subconjuntos com quatro elementos: $\{1,6,\_,\_\}$. Há $C_4^2=\frac{4\times3}{2\times1}=6$ escolhas para os outros dois elementos;

iv) Subconjuntos com cinco elementos: $\{1,6,\_,\_,\_\}$. Há $C_4^3=\frac{4\times3\times2}{3\times2\times1}=4$ escolhas para os outros três elementos;

v) Subconjuntos com seis elementos: só há o próprio conjunto *A*.

São, portanto, ao todo: subconjuntos de *A* que não são subconjuntos nem de *B* nem de *C*.

OUTRA RESOLUÇÃO

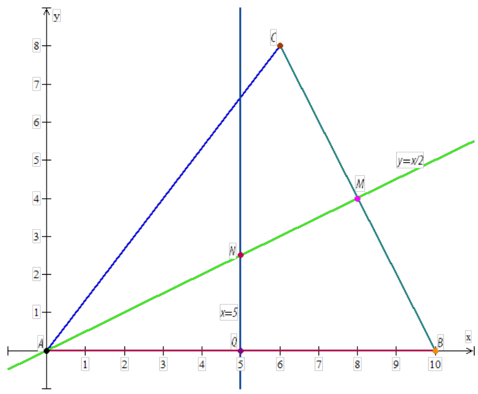
Uma vez concluído que os subconjuntos de *A* que nos interessam são aqueles que têm obrigatoriamente os elementos "1"e "6", basta observar que, agora, temos duas escolhas para cada um dos outros quatro elementos: cada um deles será ou não elemento do subconjunto. Tem-se, assim, pelo Princípio Multiplicativo:

$2\times2\times2\times2=16$ escolhas e, portanto, 16 subconjuntos.

10 Considere a região triangular de vértices $A=(0,0)$, $B=(10,0)$ e $C=(6,8)$. Um ponto dessa região é sorteado ao acaso, de modo que a probabilidade de o ponto sorteado estar em uma dada região é proporcional à área dessa região. Calcule a probabilidade de o ponto sorteado estar mais próximo do vértice *B* do que dos vértices *A* e *C*.

RESOLUÇÃO E RESPOSTA

Propriedade: dados dois pontos distintos *A* e *B* do plano, a mediatriz do segmento *AB* divide o plano em duas regiões:
i) a que contém o ponto *A* e todos os pontos do plano que estão mais próximos de *A* do que de *B*;
ii) a que contém o ponto *B* e todos os pontos do plano que estão mais próximos de *B* do que de *A*.



A figura ao lado mostra a região triangular *ABC* e a região *BMNQ* dos pontos da região triangular *ABC* que estão mais próximos de *B* do que de *A* e de *C*:

A probabilidade pedida é a razão entre a área da região *BMNQ* e a área da região triangular *ABC*.

A área da região triangular *ABC* é $\dfrac{10\times 8}{2}=40$.

O ponto *M*, médio de *BC*, tem coordenadas $(8,4)$ e o ponto *Q*, médio de *AB*, tem coordenadas $(5,0)$.

A reta que contém o segmento *BC* tem coeficiente angular $\dfrac{0-8}{10-6}=-2$. Assim, a mediatriz do segmento *BC* tem coeficiente angular $\dfrac{1}{2}$, e sua equação é $y-4=\dfrac{1}{2}(x-8)\Rightarrow y=\dfrac{x}{2}$. Portanto, o ponto *N* tem coordenadas $(5,\dfrac{5}{2})$.

A área do quadrilátero *BMNQ* é, portanto, $\dfrac{(\frac{5}{2}+4)\times 3}{2}+\dfrac{2\times 4}{2}=\dfrac{39}{4}+4=\dfrac{55}{4}$.

Assim, a probabilidade pedida é $\dfrac{\frac{55}{4}}{40}=\dfrac{11}{32}$.